DES MATHÉMATIQUES À LEUR ENSEIGNEMENT
L'ALGORITHME DE LA MULTIPLICATION

Stéphane CLIVAZ
Michel DERUAZ
HEP Vaud, Lausanne

L'enseignement et l'apprentissage des algorithmes[1] de calcul, en particulier de celui de la multiplication, est une pratique scolaire bien ancrée et socialement peu discutée, alors même que ses modalités sont remises en question par des didacticiens et par des auteurs de manuels. Cet article souhaite faire le constat des connaissances en jeu dans cet algorithme, pour les élèves et surtout pour les enseignants, à la fois dans leurs pratiques de classe et dans leur formation. Il montre ainsi ce que l'enseignement de l'algorithme de la multiplication peut apporter, au-delà de la maîtrise de l'outil de calcul.

Après une rapide description des recherches sur lesquelles il s'appuie, cet article part des contenus mathématiques constituant l'algorithme en colonne de la multiplication. Chacun de ces contenus est illustré par des constatations que nous avons réalisées dans le contexte de la formation initiale des enseignants primaires vaudois et auprès d'enseignants expérimentés. Pour quelques difficultés d'enseignement observées en classe, nous mettons successivement en évidence les liens entre la notion mathématique fondamentale concernée, les règles d'action de l'algorithme de la multiplication et cette difficulté. La conclusion mettra en lumière l'apport de l'enseignement de cet algorithme sur l'apprentissage de la numération et des propriétés des opérations.

Cadre théorique

Dans un article de 2010 reprenant des travaux réalisés dès les années 1960, Brousseau a montré à quel point l'enseignement de l'algorithme de la multiplication était coûteux en temps et peu efficace. Il y a aussi affirmé qu'« on ne peut plus enseigner le calcul élémentaire traditionnel » […] et qu'« on aurait tort de vouloir le conserver ».

---

[1] Nous utilisons le mot *algorithme* dans son sens courant et adoptons la même définition « naïve » que Vergnaud : « Un algorithme est une règle (ou une conjonction de règles) qui permet, devant tout problème d'une classe donnée à l'avance, de conduire à une solution, s'il en existe une, ou, le cas échéant, de montrer qu'il n'y a pas de solution. » (Vergnaud, 1994, p. 208).

Grand N n° 92, pp. 15 à 33, 2013

Cette position est d'ailleurs présente dans les manuels romands qui posent la question : « On peut même se demander si le citoyen du XXI$^{\text{ème}}$ siècle, qui disposera vraisemblablement de calculatrices ou d'autres instruments de calcul, l'utilisera encore ou l'oubliera ! » (Danalet, Dumas, Studer & Villars-Kneubühler, 1999, p. 164). Et pourtant, assumant le dilemme qu'il pose, Brousseau soutient fermement « qu'on ne doit pas abandonner l'enseignement du calcul élémentaire traditionnel "à la plume" » et il propose des dispositions de calcul et des séquences d'enseignement permettant d'améliorer cet enseignement.

De leur côté, les travaux de Ma (1999), de Ball et son équipe (Ball, Thames & Phelps, 2008), repris et développés par Clivaz (2011b)[2] montrent que les enseignants n'ont souvent pas les connaissances mathématiques spécifiques leur permettant d'enseigner efficacement cet algorithme. En particulier, l'analyse mathématique et épistémologique réalisée par Clivaz (2011b) à propos de l'algorithme de la multiplication et les résultats qu'il a obtenus quant à l'influence des connaissances mathématiques des enseignants sur leurs choix d'enseignement nous permettront de mettre en relation quatre contenus mathématiques essentiels dans cet algorithme d'une part et les choix faits par les enseignants d'autre part. Nous décrirons ci-dessous ces quatre connaissances mathématiques spécifiques que sont la distributivité, l'associativité, la numération décimale de position et finalement la définition de la multiplication, sous-jacente à ces propriétés. Nous montrerons que ces connaissances ne sont pas toutes maîtrisées par de futurs enseignants en formation, et nous illustrerons les difficultés d'enseignement générées par une maîtrise insuffisante de ces connaissances par les enseignants.

La séparation en deux lignes puis l'addition : le lien avec la distributivité

Éléments d'analyse mathématique

Les algorithmes de la multiplication ont été étudiés à plusieurs reprises dans Grand N (par exemple, Brousseau (2010), Painchault (1975), Viennot & Artigue (1978)). Pour effectuer de la manière classiquement enseignée en Suisse romande la multiplication en colonnes 583 × 35, on sépare la multiplication en deux lignes, on effectue chaque multiplication par un nombre à un chiffre et d'additionner les deux lignes.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 5 & 8 & 3 \\
 & & \times & & 3 & 5 \\
\cline{3-6}
 & & 2 & 9 & 1 & 5 \\
+ & 1 & 7 & 4 & 9 & 0 \\
\hline
 & 2 & 0 & 4 & 0 & 5
\end{array}
$$

Figure 1 – 583 × 35, algorithme en colonnes « classique »

[2] Au cours de ce travail de thèse, Clivaz a réalisé des entretiens auprès de 16 enseignants primaires vaudois selon le canevas de Ma comportant en particulier une question concernant l'enseignement de l'algorithme de la multiplication (Clivaz, 2012b). Il a d'autre part observé l'intégralité de la séquence d'enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres dans la classe de quatre enseignants de 4$^{\text{ème}}$ primaire (équivalent CM1, élèves de 9 à 10 ans) et a réalisé des entretiens avec ces quatre enseignants (Clivaz, 2011a).

Cette séparation en deux lignes suivies par une addition est liée à la décomposition additive de 35 en 5 + 30 et à la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition.

$$583 \times 35 = 583 \times (5 + 30) = (583 \times 5) + (583 \times 30) = 2915 + 17490 = 20405$$

Chacune des multiplications de 583 par un nombre à un chiffre est elle-même effectuée en décomposant 583 et en appliquant la distributivité, ainsi par exemple :

$$583 \times 5 = (500 + 80 + 3) \times 5 = (500 \times 5) + (80 \times 5) + (3 \times 5) = 2500 + 400 + 15 = 2915\,.$$

Si on détaille ces deux décompositions, on obtient une autre technique qui est en fait une version développée de l'algorithme classique.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 5 & 8 & 3 \\
 & & \times & & 3 & 5 \\
\cline{3-6}
 & & & & 1 & 5 \\
 & & & 4 & 0 & 0 \\
 & & 2 & 5 & 0 & 0 \\
 & & & & 9 & 0 \\
 & & 2 & 4 & 0 & 0 \\
+ & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & 2 & 0 & 4 & 0 & 5
\end{array}$$

Figure 2 – 583 x 35, algorithme en colonnes « développé »

Cette décomposition peut être mieux visualisée par la décomposition permettant de calculer le nombre de carrés unités d'un rectangle de côtés 583 et 35.

	500	80	3
5	2500	400	15
30	15000	2400	90

Figure 3 – 583 x 35, algorithme en colonnes « en rectangle »

Si la distributivité de la multiplication sur l'addition est mal utilisée par l'élève, il risque notamment d'écrire les produits partiels sans les additionner. Si elle n'est pas prise en compte, il pourrait même effectuer une multiplication « en colonnes strictes » consistant à n'effectuer que les produits des chiffres situés à la verticale les uns des autres comme dans une addition en colonnes (Gianferrari, 2000).

$$\begin{array}{rrrr}
 & 5 & 2 & 3 \\
\times & 7 & 4 & 1 \\
\hline
3 & 5 & 8 & 3
\end{array}$$

Figure 4 – Multiplication « en colonnes strictes »

Constat chez les étudiants futurs enseignants

Depuis 2010, l'Unité d'Enseignement et de Recherche en didactique des Mathématiques et des Sciences de la nature (UER MS) de la Haute École Pédagogique du canton de Vaud (HEP Vaud) a la charge d'un cours de savoirs disciplinaires en mathématiques. Un des objectifs prioritaires du cours est de permettre aux étudiants de percevoir l'impact sur l'enseignement des savoirs mathématiques[3]. Pour des questions d'organisation interne, ce cours est donné en grands effectifs (180 étudiants) et des exercices sont proposés en ligne avant, pendant et après le cours. Les traces informatiques de ces exercices nous permettent de faire un certain nombre d'observations.

En septembre 2010, nous avons fait passer un test de 22 questions à choix multiples à 239 étudiants en deuxième et en troisième année de formation initiale à la HEP Vaud[4]. Ce test était présenté aux étudiants comme un test diagnostique à la fois utile pour la conception du cours qu'ils allaient suivre et à visée de recherche. Les étudiants n'avaient aucun document à disposition et ne pouvaient pas utiliser leur calculatrice. Plusieurs questions évaluaient les propriétés des opérations, mais aussi la priorité des opérations ainsi que la reconnaissance d'algorithmes pour la multiplication.

À la question :

> Voici deux égalités :
>
> A. $5 + 7 \times 4 = 48$
>
> B. $13 \times (16 + 23) = (13 \times 16) + (13 \times 23)$
>
> **1.** A et B sont fausses.
>
> **2.** A et B sont vraies.
>
> **3.** A est fausse et B est vraie.
>
> **4.** A est vraie et B est fausse.

On a obtenu les réponses ci-dessous :

Réponse n°	1	2	3	4
Choix des étudiants	12,1%	29,7%	41,4%	15,5%
R.bis	-0,19	-0,05	0,36	-0,24

La bonne réponse (3) n'a été choisie que par 41,4% des étudiants, mais le coefficient de corrélation bisériale de point classique (R.bis) (Gilles, 2010, pp. 171-177) de 0,36 comparé aux R.bis négatifs des autres propositions nous indique qu'il s'agit des étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats sur l'ensemble du test. En ajoutant les scores des réponses 2 et 3, on note que la distributivité n'a été appliquée correctement que par 71,3% des étudiants, alors qu'elle était proposée dans sa forme simple et directe.

L'examen certificatif ponctuant le cours en janvier 2011 était composé de 32 questions à choix multiples et a été passé par 150 étudiants. Trois questions portaient sur les propriétés

[3] Cet objectif, indissociable de l'apprentissage de ces savoirs, s'appuie sur la veine des recherches développées à la suite de l'impulsion de Shulman (1986), en particulier par Ball et son équipe (voir par exemple Ball *et al.*, 2008). La *connaissance pédagogique du contenu* (en anglais *Pedagogical Content Knowledge*, PCK) est bien, pour Shulman, d'abord une connaissance du contenu : « Je parle encore de connaissance du contenu ici, mais de cette forme particulière de connaissance du contenu qui intègre les aspects du contenu les plus liés à son enseignabilité » (Shulman, 1986 / 2007).

[4] Les futurs enseignants primaires entrent à la HEP après un bac. La formation est effectuée en trois ans et débouche sur un Bachelor.

des opérations numériques. On observe qu'une partie des étudiants rencontre encore des difficultés[5].

Par exemple, à la question :

> Dans un quadrilatère, lorsqu'on multiplie la longueur de chaque côté par trois, on multiplie le périmètre par trois.
>
> Quelle propriété est utilisée pour justifier ce résultat ?
>
> **1.** La commutativité de l'addition.
>
> **2.** La commutativité de la multiplication.
>
> **3.** La distributivité de la multiplication sur l'addition.
>
> **4.** L'associativité de l'addition.
>
> **5.** L'associativité de la multiplication.

On a obtenu les réponses ci-dessous :

Réponse n°	1	2	3	4	5
Choix des étudiants	0,7	4,6	71,4	1,9	19,5
R.bis	-0,08	-0,20	0,28	-0,12	-0,19

La bonne réponse (3) n'a été trouvée que par 71,4% des étudiants. Ce résultat est comparable au 71,3% observé à la question du pré-test. Cette nouvelle question est certes plus complexe puisqu'elle nécessite un changement de cadre, mais elle vient à l'issue du cours dans lequel ces notions ont été travaillées, en particulier dans le cadre géométrique. On constate dans ce cas aussi que la question est discriminante puisque le R.bis de la bonne réponse est relativement élevé alors que ceux des distracteurs sont négatifs.

Les résultats obtenus aux deux autres questions vont dans le même sens et montrent que les étudiants ont aussi des difficultés avec l'associativité de la multiplication.

Par contre, les étudiants maîtrisent un algorithme pour multiplier puisque 95,5% des étudiants effectuent correctement une multiplication d'un nombre à trois chiffres par un nombre à deux chiffres. Lorsque l'on demande aux étudiants d'effectuer une multiplication du même type dans une autre base que la base dix, elle est faite correctement par 92,9% des étudiants, alors qu'une partie des étapes nécessaires à sa réalisation ne peuvent plus être considérées comme des automatismes.

On note donc que, même si la plupart des étudiants utilisent correctement un algorithme de multiplication qu'ils devront enseigner plus tard, à peine plus de 70% d'entre eux reconnaissent la distributivité de la multiplication sur l'addition alors que cette connaissance mathématique est nécessaire à la compréhension et à l'explication de cet algorithme.

---

[5] Les réponses des étudiants aux autres questions du test montrent qu'il ne s'agit pas d'une méconnaissance du vocabulaire.

L’influence sur l’enseignement

Pour illustrer les choix des enseignants par rapport à cet aspect de l’algorithme, nous examinerons le cas de Camille, enseignante de 4P[6], puis, plus globalement, les réponses des enseignants à la question de Ma et enfin les connaissances des étudiants à l’enseignement primaire à la HEP Vaud.

Lors de l’entretien préliminaire à la séquence d’enseignement, Camille a déclaré avoir décidé de « montrer l’algorithme de la multiplication » par un nombre à deux chiffres de manière « expéditive », sans préparation particulière autre que la révision de l’algorithme à un chiffre. Effectivement, elle démarre directement en posant la multiplication de 2417 par 25. Elle cache immédiatement le 2 de 25 à l’aide d’un morceau de papier :

> Camille : Alors, attention les vélos, regardez bien ce que je vais faire. (Camille pose un cache sur le 2 du second terme). Je cache le 2. Et ce qui nous reste là, c’est ?
> Élève : 5.
> Camille : Ouais, c’est une multiplication ?
> Élève : À un chiffre.
> Camille : Par 5, comment ?
> Élève : À un chiffre.
> Camille : À un chiffre, comme vous venez de faire. Alors on va voir, normalement vous devez la maîtriser.

Camille ne donne aucune autre explication ou justification de la première ligne. Arrivée au bout de celle-ci, elle enlève le cache et demande aux élèves comment ils pensent que l’on va continuer : « Formulez des hypothèses. Si c’est pas les bonnes, c’est pas grave ». Ces deux interventions ne sont pas au plan mathématique et les élèves se lancent dans un jeu de devinettes. Les élèves formulent plusieurs hypothèses, toutes hors de propos :

> Camille : Bon, qu’est-ce qu’on va bien pouvoir faire maintenant? (plusieurs élèves lèvent la main pour répondre) Vous me dites vos idées, vous formulez des hypothèses. Si c’est pas les bonnes, c’est pas grave. Tu ferais quoi, toi ?
> Élève 1 : Après, on fait pareil avec 20. Euh... Avec 20 comme ça puisque là c’est vingt euh cinq. Alors on fait pareil puis après on additionne les deux réponses.
> Camille : Qu’est-ce que tu en penses, toi ?
> Élève 2 : Ben, on fait 12’085 plus 12’085.
> Camille : (temps de silence) D’accord. Qu’est-ce que tu en penses, toi ?
> Élève 3 : Ben moi je dirais comme lui, deux fois, c’est..., on fait la même chose que le 5, et puis là on additionne après les deux chiffres.
> Élève 4 : On fait la même chose, on réécrit en dessous, mais là on additionne les deux...
> Camille : Qu’est ce que tu en penses. Toi ?
> Élève 5 : Ici on fait deux fois tout ça, et puis après on additionne. Puis on fait euh, le calcul.
> Camille : Les autres qui se sont pas prononcés ? T’en penses rien, toi ? Merci.
> Élève 6 : La même chose que [Elève 1].
> Camille : D’accord… On va voir qui a raison !

Face à l’absence de la réponse attendue, Camille décrit alors la *règle du zéro*[7]. Elle effectue ensuite le calcul de la seconde ligne après avoir placé le cache sur le 5, toujours sans explication. L’addition finale est justifiée par le fait que « on n’a pas vraiment une réponse, là » et par le fait que plusieurs élèves avaient parlé d’une addition au moment des hypothèses à formuler. Là encore, l’interaction est non-mathématique.

---

[6] Équivalent CM1, élèves de 9 à 10 ans.

[7] « Quand on multiplie par dix, on ajoute un zéro ». L’usage de cette *règle du zéro* sera développé plus loin.

Un peu plus tard, Camille donne un autre exemple, 583 × 35, et demande aux élèves d’expliquer chaque passage. Pour la première ligne, l’explication consiste à cacher le 3. Ce qui est à nouveau une intervention qui ne se situe pas au plan mathématique. Puis, au moment de passer à la seconde ligne d’une multiplication, Camille demande aux élèves pourquoi il faut ajouter un zéro à la seconde ligne. Elle constate que les explications sont confuses, et elle décompose le second terme et trace des flèches vers celui-ci (voir Figure 5), mais ce n’est pas pour justifier la séparation en deux lignes, mais bien pour dire qu’il s’agit de 30 et que c’est là la raison de l’ajout du zéro.

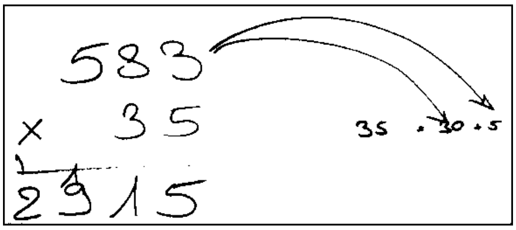


Figure 5 – Camille, écriture de 35 = 30 + 5
et traçage des flèches avant le passage à la seconde ligne.

Au moment de passer à l’addition, Camille justifie qu’il faut additionner, « parce que c’est pas fini, on n’a pas une réponse, on a deux étages » et que cela ressemble à un calcul donné en devoir. Elle écrit :

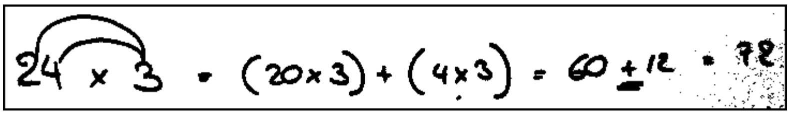


Figure 6 – Camille, explication du fait qu’il faut additionner les deux lignes de la multiplication 583 × 35.

Camille ajoute ensuite que c’est la même chose et qu’il faut donc additionner.

Camille est donc consciente du fait que la distributivité est en lien avec l’algorithme de la multiplication. Toutefois la comparaison entre la multiplication 583 × 35 et 24 × 3 n’est pas utilisée à bon escient puisqu’en fait elle expliquerait la décomposition du premier terme, 583, que celle du second, 35. Ensuite, cette explication ne vient qu’en appui d’une technique déjà présentée lors de la leçon précédente, un peu comme un truc pour s’en souvenir. Enfin et surtout, même si le lien est fait, ce n’est pas au plan mathématique mais uniquement en faisant appel à la mémoire des élèves. Pour eux, cela se traduit plus par « il faut faire comme dans l’exercice untel » que comme « l’algorithme en colonne revient à effectuer la même décomposition des opérations que le calcul réfléchi ». Autrement dit, là encore, l’interaction n’est pas au niveau mathématique et Camille ne justifie pas vraiment l’addition finale, alors même qu’elle affirme le faire.

Cette volonté d’expliquer est présente chez la majorité des enseignants vaudois interrogés par Clivaz. Toutefois, pour la plupart d’entre eux, ces explications ne sont pas des arguments mathématiques, comme pour Gaëlle pressée par le chercheur de justifier l’addition finale :

> Gaëlle : En séparant comme ça les calculs, on peut dire qu’on a plusieurs réponses, qu’il faut bien qu’on en fasse quelque chose, de ces réponses. Enfin, qu’on va forcément les mettre ensemble pour trouver... un résultat final.
> Chercheur : Et si on les multipliait ?
> Gaëlle : Ben on... on finirait jamais !

Ces arguments semblent donc parfois remplacer une connaissance mathématique manquante. En entendant, par contraste lors des entretiens, les termes *comprendre*, *pourquoi*, *expliquer*… l'hypothèse pourrait être faite que souvent l'enseignant ne fait pas la distinction entre le statut anecdotique de telles affirmations et des arguments mathématiques.

Le zéro pour décaler : le lien avec l'associativité et la numération décimale de position

Éléments d'analyse mathématique

Lors de l'écriture de la seconde ligne de l'algorithme en colonnes classique, il est nécessaire de poser un zéro ou de décaler le produit d'un rang vers la gauche (voir Figure 1). La raison de la présence de ce zéro ou de ce décalage apparaît dans l'algorithme développé (Figure 2) ou, plus généralement, dans la décomposition décimale du second facteur : dans la multiplication 583 × 35, la seconde ligne correspond à la multiplication de 583 par 30.

Il y a deux manières de considérer cette multiplication par 30. La première insiste sur l'aspect *positionnel* et la seconde sur l'aspect *décimal* de notre système de numération (Tempier, 2010).

La première façon de faire consiste tout d'abord à décomposer 30 en 3 × 10 et à utiliser l'associativité de la multiplication.

$$583 \times 30 = 583 \times \left(3 \times 10\right) = \left(583 \times 3\right) \times 10 = 1749 \times 10$$

Il faut ensuite voir que multiplier par 10 revient à décomposer 1749 et à prendre 10 fois chacune des 9 unités, qui deviennent donc 9 dizaines ; 10 fois chacune des 4 dizaines, qui deviennent donc 4 centaines… Autrement dit, multiplier un nombre par 10 revient à augmenter chaque ordre de groupement de un. Le chiffre des unités devient le chiffre des dizaines, celui des dizaines devient celui des centaines… et il y a 0 unité isolée.

La seconde manière consiste à considérer qu'on effectue une multiplication par 3 dizaines, et donc que le résultat est donné en dizaines. On a alors un « nombre de dizaines », 1749 dizaines, et le 9 apparaît dans la colonne des dizaines, avec une place vide dans la colonne des unités.

L'influence sur l'enseignement

L'alignement du second produit partiel sous le premier, sans décalage, est la cause d'erreur la plus crainte par les enseignants. Elle est effectivement très fréquente chez les élèves et les enseignants observés ou interrogés par Clivaz ont tous prévu une manière de traiter cette difficulté et la plupart ont affirmé qu'ils souhaitaient que les élèves *comprennent* ce zéro et ont appuyé leur explication sur la *règle du zéro* : « Pour multiplier par 10, on ajoute un zéro ». Toutefois, les explications données sont le plus souvent problématiques ou non mathématiques comme vont l'illustrer les exemples de Dominique et Nicole.

Dans un épisode analysé en détail par Clivaz (2012a), Dominique explique l'algorithme de la multiplication sur l'exemple 12 × 17. Au moment de commencer la seconde ligne, la raison donnée par Dominique pour placer le zéro est le fait qu'on travaille avec des dizaines, et que, lorsqu'on travaille avec des dizaines, on ajoute un zéro.

Dominique : C'est 1, ça ?
Élève : 10.
Dominique : C'est 10 ! Donc attention, quand on travaille avec les dizaines, qu'est-ce qu'on doit rajouter ?
Élève : Un zéro.

Dominique s'appuie ici directement sur plusieurs rappels effectués, en particulier durant la leçon précédente, à propos de cette *règle du zéro*. Il avait à ce moment-là dit sur plusieurs exemples, « Quand on multiplie par dix, on ajoute un zéro ». La formulation devient ici « Quand on travaille avec les dizaines », mélangeant ainsi les deux points de vue développés ci-dessus.

Mis à part l'usage inadéquat du vocabulaire additif (ajouter) dans une situation multiplicative, cette formulation est correcte, pour autant qu'on ne la sorte pas de ce contexte et, en particulier, qu'on ne cherche pas à l'appliquer à d'autres moments dans l'algorithme. En effet, si on la prend au pied de la lettre, et c'est ce que font certains élèves, elle conduit à ajouter d'autres zéros à chaque fois que la multiplication concerne un chiffre des dizaines. En fait, cette règle, dans le cadre de l'algorithme de la multiplication, est un raccourci des propriétés développées ci-dessus. Le problème est pourtant qu'un raccourci efficace, une connaissance encapsulée, ne permet pas une interaction mathématiquement pertinente.

Pour expliquer l'apparition d'un zéro dans la deuxième ligne de l'algorithme de la multiplication en colonnes, Nicole déclare :

> Pour passer au deuxième rang, il me manque ce zéro. Alors pour qu'il tienne, je l'ai appelé "Super Zéro". Il y a Super Zéro qui arrive et qui vient nous aider. [...] Et puis ce Super Zéro, je lui ai mis un visage, parce qu'ils doivent se rappeler que c'est Super Zéro, qu'il existera toujours et qu'il vient nous aider pour faire ces calculs. C'est ce système que j'ai trouvé. [...] Et le Super Zéro est en rouge ! Toujours en rouge. [...] Maintenant, nous on est à deux, mais on va passer à trois chiffres, donc Super Zéro, ben il s'est marié, et puis ils sont Super Zéro et Madame Super Zéro, des nouveaux des gentils, bien sûr, et puis ces deux vont maintenant nous aider, et je les laisse aussi en rouge, puisque c'est mari et femme, et puis on continue l'exercice dans ce sens-là. Au début, je leur explique simplement Super Zéro, comment faire, qu'il existe, qu'il faut le mettre, et quand ils ont bien compris ce calcul de base, je leur fais faire, comparer pourquoi on le met. Donc je leur fais faire le calcul sans le zéro et puis le calcul avec, et qu'ils voient pourquoi est-ce qu'il y a ce Super Zéro qui est là. Et ils remarquent tout de suite que ben ça donne pas le même résultat [...] Je vais peut-être pas aller aussi loin, pour montrer le décalage, pourquoi ça fait ça.

Le reste de l'entretien avec cette enseignante montre qu'elle ne dispose pas de la connaissance du « pourquoi on fait ça ». Pourtant, avec son sens pédagogique, elle pallie cette absence de connaissance par un enseignement, peut-être efficace à court et peut-être même à long terme, mais seulement si l'efficacité de l'enseignement est mesurée selon la capacité des élèves à effectuer correctement l'algorithme de la multiplication. Elle est en tous les cas satisfaite du « système » qu'elle a trouvé et n'a aucune raison d'en changer. En revanche, l'usage de trucs pédagogiques empêche la création de liens entre la notion étudiée et les autres connaissances, ici entre l'algorithme de la multiplication et la numération décimale de position, les propriétés des opérations… Super Zéro permet hélas également aux élèves d'éviter de tisser ces liens et de considérer l'algorithme de la multiplication comme un *truc*, un peu magique, contribuant ainsi à la construction d'une conception des mathématiques comme une collection de *trucs* un peu magiques…

Interrogée dès lors sur le fait d'utiliser un zéro plutôt qu'un autre symbole, comme un trait, ou une étoile, ou encore de laisser un espace vide, Nicole répond également par des considérations de type pédagogique : « C'est tout simplement pour pas qu'ils mélangent avec le fois, le moins... un autre signe ».

L'alignement et les retenues : le lien avec la numération décimale de position

Éléments d'analyse mathématique

Le passage de l'algorithme développé à l'algorithme condensé (voir Figure 2 et Figure 1) est pris en charge par l'addition des termes au fur et à mesure de la multiplication par chaque chiffre du second facteur. Cette prise en charge est possible dans le cadre de la numération décimale de position grâce au placement correct de chaque chiffre dans des colonnes représentant les unités, les dizaines, les centaines… Lors de chaque multiplication élémentaire d'un nombre (entre 0 et 9) par un autre nombre (entre 0 et 9), elle se marque par le fait de noter le chiffre des unités de ce produit dans la colonne appropriée et de *retenir en mémoire* le chiffre des dizaines afin de l'additionner au chiffre des unités du produit élémentaire suivant. Cette *retenue* peut être faite par écrit, sur les doigts ou « dans la tête ».

La tentative de description verbale que nous venons de faire marque bien la difficulté de donner une description correcte et compréhensible de ce mécanisme. Le processus existe déjà lors des additions en colonnes. La difficulté supplémentaire est que ce processus d'addition est ici intriqué avec des multiplications. Ces retenues sont ainsi la principale source d'erreurs potentielles (Brousseau, 2010, p. 17).

L'apprentissage de la gestion des retenues est fait au moment de l'enseignement de la multiplication en colonnes par un nombre à un chiffre. Nous ne traiterons pas de cet apprentissage ici. Le passage à la multiplication par un nombre à deux chiffres est toutefois source de difficultés supplémentaires comme l'illustre le cas de Sacha.

L'influence sur l'enseignement

Lors de l'explication de l'algorithme, Sacha ne dessine pas de colonnes. En revanche, tant durant cette explication que lors des autres algorithmes de multiplication effectués de façon publique, elle désigne la place des chiffres en parlant de « la colonne des unités », ou de la « colonne des dizaines »… Pour ce qui est des retenues, elle choisit, contrairement à ce qui est recommandé dans Cap Math[8], de les noter directement sur la multiplication (et donc dans les colonnes adéquates), en utilisant la même couleur que celle employée pour écrire la ligne correspondante.

[8] Sacha est la seule enseignante observée à ne pas utiliser les manuels officiels romands COROME (Danalet *et al.*, 1999), mais Cap Math (Charnay, Combier, Dussuc, Madier & Madier, 2007).

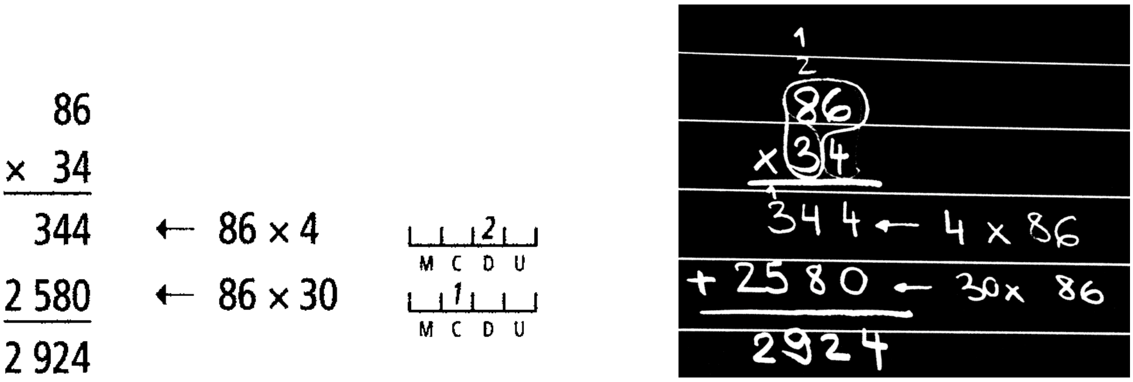


Figure 7 – Notation des retenues
dans Cap Math (Charnay *et al.*, 2007, p. 261) et chez Sacha[9]

Les autres enseignants observés demandaient tous de ne pas noter les retenues pour ne pas mélanger celles issues de la première ligne et celles issues de la seconde ligne de l'algorithme. Sacha semble ainsi résoudre ce problème du mélange des retenues tout en conservant les sens de la retenue dont la notation et le rôle ne se distinguent pas de ceux qu'ils ont dans l'addition en colonnes. Toutefois l'examen plus attentif du placement du 1 issu de la multiplication 3 × 6 = 18 montre que celui-ci n'est pas placé au bon endroit puisqu'il s'agit en fait de la multiplication 30 × 6 et que le 1 est une centaine. Ainsi que l'indique Brousseau : « L'élève doit décaler d'un rang vers la gauche à chaque multiplicateur et il peut oublier la signification de ce qu'il calcule » (2010, p. 15). Alors même qu'elle est extrêmement attentive à bien marquer le sens de chaque opération, alors même qu'elle suit rigoureusement un manuel rigoureux, Sacha commet ici une erreur, probablement par souci de cohérence de l'écriture et probablement parce que le manuel qu'elle utilise ne pointe pas la difficulté mathématique du placement des retenues lors de la seconde ligne de calcul. La complexité et les risques d'erreur sont ici d'ailleurs tels qu'on peut légitimement se demander si cet algorithme en colonnes traditionnel est préférable à l'algorithme développé (Figure 2) ou à l'algorithme en rectangle (Figure 3).

Les représentations de la multiplication

La méconnaissance des raisons d'être des techniques utilisées dans l'algorithemen de la multiplication et les difficultés rencontrées par les étudiants et les enseignants avec les propriétés des opérations utilisées dans cet algorithme reposent sur la manière dont ils se représentent cette opération, et donc sur la définition sous-jacente de la multiplication.

Éléments d'analyse mathématique

La multiplication de deux nombres entiers *a* et *b* peut être définie mathématiquement de plusieurs manières. Une d'entre elles consiste à définir le produit de deux entiers *a* et *b* comme le cardinal du produit cartésien d'un ensemble de cardinal *a* par un ensemble de cardinal *b*. Autrement dit :

$$(\text{Card A})\ (\text{Card B}) = \text{Card}\ (\text{A} \times \text{B})$$

[9] Cap Math demande de noter les retenues dans une « boîte à retenue » placée à côté de la multiplication et comportant une ligne d'en tête avec les lettres M, C, D et U et une ligne pour les retenues de chaque produit partiel. Sacha indique les retenues au-dessus du premier terme en utilisant une couleur (qui n'apparaît pas sur cette figure) pour chaque ligne de la multiplication en colonnes.

Cette définition ensembliste permet de démontrer les propriétés de la multiplication en se basant sur la théorie des ensembles. Elle a été abondement utilisée au moment des mathématiques modernes avec, par exemple, une première introduction de la multiplication en 2P[10] par un problème demandant de dessiner des fleurs de 2 formes et de 3 couleurs dans un tableau à double entrée[11]. Cette définition est en rapport direct avec l'aire d'un rectangle de dimensions entières (Noirfalise & Matheron, 2009, p. 242). Elle permet une représentation de la multiplication comme l'aire d'un rectangle et permet également d'illustrer les propriétés de la multiplication, en particulier la commutativité (par rotation d'un quart de tour du rectangle) ou la distributivité par rapport à l'addition comme l'illustrait déjà la Figure 3 (Viennot & Artigue, 1978). Elle peut aisément être étendue aux nombres réels.

Une seconde définition consiste à définir la multiplication dans $\mathbb{N}$ par récurrence :

$$0 \cdot x = 0$$
$$1 \cdot x = x$$
$$\text{et pour } n \geq 0 \text{ par : } (n+1) \cdot x = n \cdot x + x$$

(Bouvier, George & Le Lionnais, 2009, p. 608)

Cette définition est en rapport avec une représentation de l'addition comme une addition itérée : $nx = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ fois}}$. Cette représentation est la première rencontrée par les enfants. Selon Vergnaud (1994, p. 121), c'est même la seule possible si l'on veut partir d'un matériel concret. Elle est engendrée par des situations du type « Une équipe gagne 5 enveloppes contenant chacune 6 jetons. Combien de jetons cette équipe a-t-elle gagnés ? » ou encore « On a un ruban constitué de 5 morceaux de 6 cm chacun, combien mesure ce ruban ? ». Dans ce cas les facteurs n et x, respectivement 5 et 6, ne jouent pas le même rôle. 6 est un nombre concret, il est pourvu d'une unité, alors que 5 est un nombre abstrait (Noirfalise & Matheron, 2009, pp. 245-246) ou encore un opérateur scalaire (Vergnaud, 1994, p. 167). Cette dissymétrie des rôles rend impossible la perception de la commutativité de la multiplication et l'extension aux nombres réels est problématique. L'illustration de la distributivité par rapport à l'addition est en revanche possible, par exemple en prenant 3 morceaux de ruban de 6 cm et 2 autres morceaux de 6 cm.

Constat chez les étudiants futurs enseignants

Lors du cours de formation initiale cité plus haut, nous avons demandé aux étudiants présents de prendre quelques minutes pour « dessiner une multiplication ». Cette demande visait à mettre en évidence auprès des étudiants que, contrairement à ce qui se passe pour l'addition et la soustraction, il est difficile de visualiser une multiplication. Cette expérience que nous avons introduite en évoquant les premières phrases du Petit Prince de St-Exupéry a eu lieu deux années consécutives avant que nous présentions aux étudiants les diverses représentations possibles pour les nombres et pour les opérations. Nous avons récolté anonymement l'ensemble des dessins pour les comparer. Les dessins représentant l'addition ou la soustraction étaient tels que nous les attendions, par contre pour la multiplication, les 178 dessins obtenus étaient très diversifiés.

---

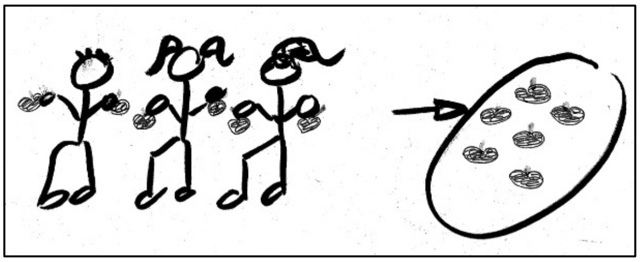
[10] CE1, élèves de 7-8 ans.

[11] Fiche OP59 dans les manuels officiels romands de 1980 (Comte, Ferrari, Wetzler & Ferrario, 1980).

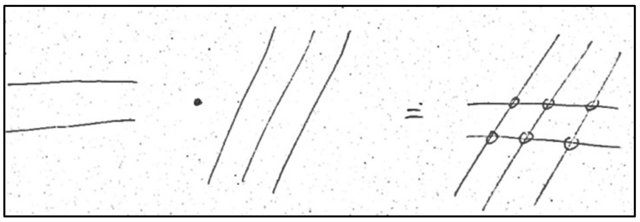
Nous avons décidé de ne pas tenir compte de 17 dessins (9,9%), soit parce que nous n'avons pas réussi à les interpréter, soit parce qu'ils n'étaient pas interprétables dans notre analyse (rébus, jeux de mots, …).

Seuls 45 dessins (26,2%) se réfèrent aux représentations que nous avions décidé de présenter au cours :

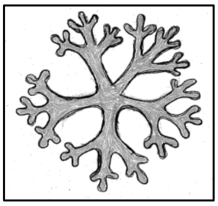
36 dessins représentent une addition itérée,



5 dessins représentent un produit cartésien ou une aire,

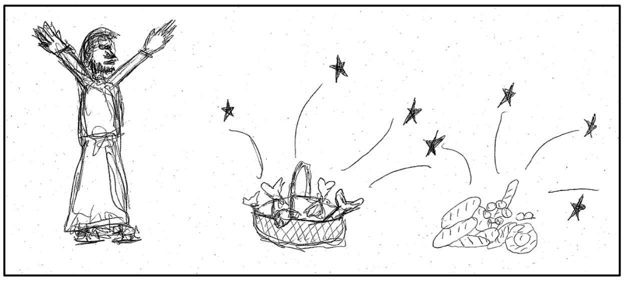


4 dessins montrent un schéma en arbre.

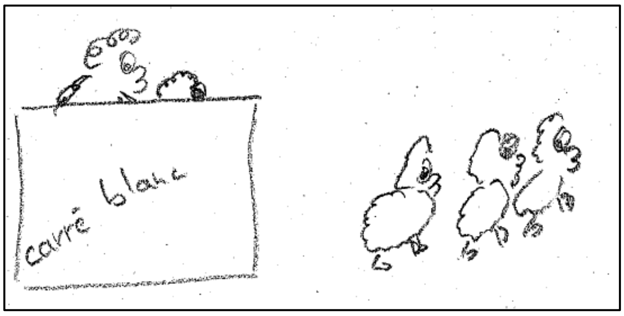


Parmi les autres dessins, 17 se réfèrent plus au mot *multiplication* qu'à l'opération qui lui est associée :

5 dessins (2,9%) évoquent des nombres devenant de plus en plus grand,

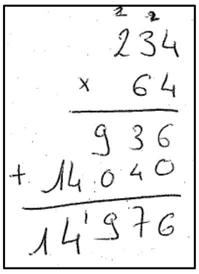


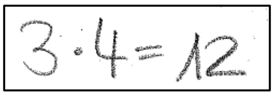
12 dessins (7%) font allusion à la reproduction en biologie.

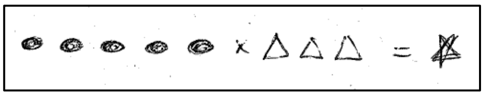


Le reste des dessins se répartissent en deux catégories auxquelles nous ne nous attendions absolument pas :

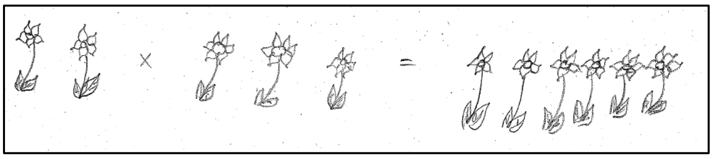
51 dessins (29,7%) représentent l'écriture d'une multiplication ou l'algorithme de la multiplication en écrivant soit des nombres soit des pictogrammes. Certains étudiants ont effectué des dessins similaires pour les autres opérations. Par contre, ceux qui l'ont fait uniquement pour la multiplication n'ont probablement pas trouvé de véritables représentations de la multiplication.







42 dessins (24,4%) représentent une multiplication à l'aide d'un symbole de multiplication et de celui de l'égalité avec un seul type d'objets. Par exemple des moutons multipliés par des moutons qui donnent des moutons ou des fleurs multipliées par des fleurs qui donnent des fleurs.



Ces étudiants ont probablement procédé par analogie avec les représentations classiques des opérations du champ additif, mais une telle représentation de la multiplication est erronée et ne correspond ni à une représentation comme addition itérée ni à une définition comme produit cartésien. Concrètement, on ne peut pas multiplier des fleurs par des fleurs ! Nous nous interrogeons donc sur la compréhension par ces futurs enseignants du concept de multiplication. Nous faisons l'hypothèse que s'ils ne modifient pas cette représentation de la multiplication avant la fin de leur formation, ils pourraient avoir des difficultés à enseigner tant la multiplication que les algorithmes qui permettent d'effectuer des multiplications.

L'influence sur l'enseignement

Chez les enseignants interrogés ou observés par Clivaz, la représentation de la multiplication comme addition itérée est prédominante, voire unique. Cette constatation avait déjà été faite au Canada (Davis & Simmt, 2006, p. 299) ou au Brésil (Amato, 2004, 2005). Chez plusieurs d'entre eux, cela engendre des difficultés d'enseignement, car cette représentation ne correspond pas aux tâches proposées aux élèves, ou aux explications fournies par l'enseignant. Il y a là une connaissance mathématique spécifique à l'enseignement qui apparaît comme déficiente. De fait, la capacité à varier les points de vue, registres ou cadres est souvent considérée comme la compétence d'un expert. Ce que dit Robert (2008, p. 34) à propos des élèves peut être étendu à l'enseignant : « Un des enjeux de l'apprentissage est d'accéder à une certaine diversité des “représentations” des objets étudiés […], ainsi qu'à une certaine organisation des concepts entre eux permettant d'en acquérir une certaine disponibilité […] ».

Ce point rejoint encore deux des tâches d'enseignement proposées par l'équipe de Ball pour illustrer les connaissances mathématiques pour l'enseignement : « Être conscient des implications de l'utilisation d'une représentation particulière ; faire les liens entre une représentation et le concept, entre plusieurs représentations d'un concept »[12] (Ball *et al.*, 2008, p. 400). L'unique représentation de la multiplication comme addition itérée peut aussi être la cause d'erreurs des enseignants. C'est le cas pour Camille qui affirme aux élèves qu'une multiplication agrandit toujours le résultat, alors qu'une division le rend plus petit. Interrogée plus précisément à l'issue de la leçon, elle dit que c'est vrai, « jusqu'en fin de quatrième » et que ça n'est faux que « quand il y a des virgules ». Elle continue d'ailleurs de penser qu'il faut dire aux élèves que multiplier, c'est agrandir et qu'on leur expliquera un jour qu'il y a des cas où cela n'est pas vrai. Cette erreur peut être liée à une représentation purement additive de la multiplication. Cette hypothèse est confirmée par la réaction de Camille lors de l'entretien *post* lorsque la représentation de la multiplication comme aire d'un rectangle lui est présentée : « J'ai jamais fait le lien! J'y ai jamais pensé ». Pourtant, dans la suite de l'entretien, Camille se souvient avoir fait des exercices liant aire et multiplication, mais en modifiant la donnée de telle sorte que l'exercice serve uniquement à noter les tables de multiplication. Cette erreur sur « la multiplication qui agrandit et la division qui rend plus petit » et son lien avec les représentations additives de la multiplication et partitive de la division a d'ailleurs été relevée par Tirosh et Graeber chez 11% (pour la multiplication) et 52% (pour la division) d'une population de 136 futurs enseignants primaires étatsuniens (Tirosh & Graeber, 1989).

Des raisons d'enseigner l'algorithme de la multiplication

Nous avons donné quelques illustrations de la nécessité de connaissances mathématiques pour l'enseignement pour permettre aux professeurs d'enseigner l'algorithme de la multiplication. Ces connaissances permettent aux enseignants de choisir s'ils donnent une description purement procédurale de l'algorithme ou s'ils en donnent une explication mathématiquement fondée. C'est justement ces explications basées sur les conceptions de la multiplication, sur les propriétés de la multiplication et sur celles du système de numération qui constituent à notre avis la principale raison d'enseigner l'algorithme de la multiplication en colonnes alors même que celui-ci ne sera presque jamais utilisé par l'élève.

Tout d'abord, la compréhension des propriétés en jeux lors de l'algorithme de la multiplication en colonnes permet de ne pas séparer celui-ci du calcul réfléchi et de considérer l'algorithme comme une forme d'écriture d'un calcul réfléchi.

---

[12] Ma traduction.

Mais surtout, comme nous l'avons vu, l'apprentissage de cet algorithme fournit une occasion de travailler la représentation de la multiplication comme aire d'un rectangle ou comme produit cartésien et de sensibiliser les élèves à cette multiplication d'un type différent puisque son résultat n'est pas de la même dimension. Ces deux types de multiplications reviendront d'ailleurs au moment de la géométrie vectorielle sous la forme du produit par un scalaire et du produit scalaire de deux vecteurs.

Cette représentation de la multiplication sera utile au moment du passage aux réels, mais surtout au moment du calcul littéral, par exemple pour illustrer les produits remarquables et éviter certaines erreurs bien connues.

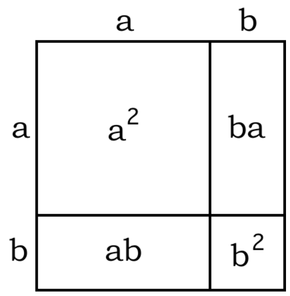


Figure 8 – $(a + b)^2$, illustration par l'aire d'un carré

Cette difficulté était d'ailleurs déjà signalée par Rousseau dans *Les confessions* :

> La première fois que je trouvai par le calcul que le carré d'un binôme était composé du carré de chacune de ses parties et du double produit de l'une par l'autre, malgré la justesse de ma multiplication, je n'en voulus rien croire jusqu'à ce que j'eusse fait la figure. […] Je voulais voir l'opération sur les lignes, autrement je n'y comprenais plus rien. (Rousseau, 1782 / 1999, livre sixième).

Ce travail sur l'algorithme peut ainsi être, pour les élèves, un travail sur des connaissances mathématiques fondamentales (Ma, 1999). Ce sont ces connaissances mathématiques d'ailleurs qui devront être développées chez ceux d'entre eux qui deviendront enseignants dans un processus cyclique décrit par Ma chez les enseignants chinois.

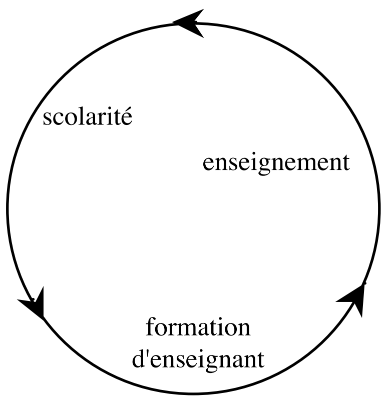


Figure 9 – Les trois périodes du développement des connaissances mathématiques des enseignants chinois (Ma, 1999, p. 145)

Selon plusieurs études (Clivaz, 2011b ; Ma, 1999 ; Schmidt *et al.*, 2007 ; Stevenson & Stigler, 1992 ; Stigler & James, 1999) cette dynamique semble toutefois ne pas fonctionner chez les enseignants occidentaux. Nous avons vu dans cet article une entrée possible au niveau de la scolarité pour faire fonctionner le premier stade de développement de ces connaissances : distributivité, associativité, numération décimale de position et définition de la multiplication comme produit cartésien. Nous décrirons dans un prochain article deux expériences pour développer ces connaissances mathématiques pour l'enseignement autour de l'algorithme de la multiplication, en formation initiale d'une part et en formation continue d'autre part.

Références

AMATO S. (2004) Improving student teachers mathematical knowledge. *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education*. Copenhagen.

AMATO S. (2005) *Improving student teachers' understanding of multiplication*. Texte présenté à la Conference of the 15th ICMI Study on the Professional Education and Development of Teachers of Mathematics, Águas de Lindóia, Brésil. Consulté le 7 novembre 2013, dans http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/SolangeAmato_ICMI15.doc

BALL D. L., THAMES M. H. & PHELPS G. (2008) Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education,* 59(5), 389-407. Consulté le 7 novembre 2013, dans http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389

BOUVIER A., GEORGE M. & LE LIONNAIS F. (Eds.) (2009) *Dictionnaire des mathématiques* (3e éd. mise à jour ed.). Paris : Presses universitaires de France.

BROUSSEAU G. (2010) Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels. *Grand N,* n°85, 13-41.

CHARNAY R., COMBIER G., DUSSUC M.-P., MADIER D. & MADIER P. (2007) *Cap Maths CE2, Guide de l'enseignant*. Paris : Hatier.

CLIVAZ S. (2011) *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Thèse de doctorat. Université de Genève, Genève. Consulté le 7 novembre 2013, dans http://archive-ouverte.unige.ch/unige:17047

CLIVAZ S. (2012a) Connaissances mathématiques de l'enseignant et bifurcations didactiques : analyse d'un épisode. *Recherches en didactique,* n°14, 29-46.

CLIVAZ S. (2012b) Des mathématiques pour enseigner : analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire. In M. Abboud-Blanchard & A. Flückiger (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2011* (pp. 247-261). Paris : ARDM, IREM de Paris 7. Consulté le 7 novembre 2013, dans http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00823673

CLIVAZ S. (2012c) Des mathématiques pour enseigner : une comparaison entre enseignants étatsuniens, chinois et vaudois. *Math-Ecole,* n°218, 61-63 / OSV61-OSV13. Consulté le 7 novembre 2013, dans http://www.ssrdm.ch/mathecole/wa_files/ME_clivaz.pdf

COMTE M.-L., FERRARI A., WETZLER J. & FERRARIO M. (1980) *Mathématique. Deuxième année* : Office romand des éditions et du matériel scolaire.

DANALET C., DUMAS J.-P., STUDER C. & VILLARS-KNEUBÜHLER F. (1999) *Mathématiques 4ème année : Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel : COROME.

DAVIS B. & SIMMT E. (2006) Mathematics-for-Teaching: an ongoing investigation of the Mamthematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics,* 61(3), 293-319. Consulté le 7 novembre 2013, dans http://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-2372-4

GIANFERRARI F. (2000) *Parcours d'obstacles en mathématiques : description, typologie et analyse des erreurs dans la multiplication en colonnes*. Mémoire de licence en sciences de l'éducation. Université de Genève,

GILLES J.-L. (2010) *Qualite Spectrale Des Tests Standardises Universitaires*. Éditions Universitaires Européennes.

MA L. (1999) *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

NOIRFALISE A. & MATHERON Y. (2009) *Enseigner les mathématiques à l'école primaire : les 4 opérations sur les nombres entiers*. Paris : Vuibert.

PAINCHAULT J. (1975) Produit de deux naturels et multiplication au CE1 et au CE2. *Grand N,* n°7, 83-102. Consulté le 7 novembre 2013, dans http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/7/7n2.pdf

ROBERT A. (2008) Sur les aprentissages des élèves: une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 33-43). Toulouse : Octarès.

ROUSSEAU J.-J. (1999) *Les confessions*. Consulté le 7 novembre 2013, dans http://athena.unige.ch/athena/rousseau/confessions/rousseau_confessions_06.html

SCHMIDT W. H., TAUO M. T., BANKOV K., BÖMEKE S., CEDILIO T., COGAN L. et *al*. (2007). *The preparation gap: Teacher education for middle school mathematics in six countries*: Mathematics Teaching in the 21st Century, Center for Research in Mathematics and Science Education, Michigan State University. Consulté le 7 novembre 2013, dans http://www.educ.msu.edu/CONTENT/SITES/USTEDS/DOCUMENTS/MT21REPORT.PDF

SHULMAN L. S. (1986) Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* 15(2), 4-14. Consulté le 7 novembre 2013, dans http://edr.sagepub.com/cgi/reprint/15/2/4

SHULMAN L. S. (2007) Ceux qui comprennent. Le développement de la connaissance dans l'enseignement (G. Sensevy & C. Amade-Escot, trad.). *Education et didactique,* 1(1), 97-114. (Original publié 1986). Consulté le 7 novembre 2013, dans http://educationdidactique.revues.org/121

STEVENSON H. W. & STIGLER J. W. (1992) *The learning gap: why our schools are failing and what we can learn from Japanese and Chinese education*: Summit Books.

STIGLER J. & JAMES H. (1999) *The teaching gap. Best ideas from the worlds teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press.

TEMPIER F. (2010) Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N,* n°86, 59-90.

TIROSH D. & GRAEBER A. O. (1989) Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics,* 20(1), 79-96. Consulté le 7 novembre 2013, dans http://dx.doi.org/10.1007/BF00356042

VERGNAUD G. (1994) *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire* (5e éd.). Bern : P. Lang.

VIENNOT J. & ARTIGUE M. (1978) Quelques réflexions à propos de la multiplication. *Grand N,* n°15, 43-68. Consulté le 7 novembre 2013, dans http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/15/15n3.pdf